МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ТА СИСТЕМИ

Методичні вказівки та варіанти завдань
для типового розрахунку з вищої математики

Київ 2014

Диференціальні рівняння та системи. [Текст]: Методичні вказівки та варіанти завдань для типового розрахунку з вищої математики для студентів напрямів підготовки «Теплоенергетика», «Електротехніка та електротехнології» , «Електромеханіка» і «Гірництво» /Уклад: Т.В.Карнаухова, В.Ф.Зражевська, В.В.Могильова – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 80 с.

Рекомендовано вченою радою
Інституту енергозбереження та енергоменеджменту, НТУУ „КПІ”
(Протокол № 9 від 14 березня 2014 р.)

Навчальне електронне видання

Диференціальні рівняння та системи

Методичні вказівки та варіанти завдань

для типового розрахунку з вищої математики

для студентів напрямів підготовки «Теплоенергетика», «Електротехніка та електротехнології» , «Електромеханіка» і «Гірництво»

Укладачі: Т.В. Карнаухова, канд.. фіз.-мат. наук, доцент
В.Ф.Зражевська канд.. фіз.-мат. наук, доцент
В.В.Могильова, канд.. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний редактор М.Є.Дудкин, доктор фіз.-мат. наук, професор

Рецензент О.М.Станжицький, доктор фіз.-мат. наук, професор

За редакцією укладача

ВСТУП

При вивченні різноманітних процесів та явищ, розв'язуванні багатьох задач із математики, механіки, фізики, біології тощо часто не вдається встановити функціональну залежність між шуканими та даними змінними величинами. Проте складається рівняння, до якого крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також їхні похідні. Такі рівняння називаються диференціальними (термін " диференціальне рівняння " був уведений В.Лейбницем).

Розглянемо задачі, які приводять нас до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Температура тіла за 10 хвилин змінилась від 100^0 до 60^0. Температура навколишнього повітря підтримується постійною (10^0). Визначити, через скільки хвилин температура тіла буде 20^0.

Як відомо з фізики, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою, до якої нагріте тіло, і температурою навколишнього середовища. Позначимо температуру тіла в деякий момент часу через T(t). Тоді швидкість зміни температури за часом є похідна. Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою тіла T і температурою навколишнього середовища, то одержимо рівняння

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$$

де k - коефіцієнт пропорційності, який потрібно визначити з початкових умов: T(0) = 100, T(10) = 60. Отримали диференціальне рівняння із невідомою функцією T(t).

Задача 2. Знайти сім'ю кривих, яка має ту властивість, що кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці дорівнює потроєній ординаті точки дотику.

Нехай $y = y(x)$ – рівняння кривої, яка має задану властивість. З геометричного смислу похідної випливає, що у кожній точці кривої $y = y(x)$ повинна виконуватись рівність

$$y' = 3y,$$

яка є диференціальним рівнянням першого порядку.

Список таких прикладів можна значно розширити.

Глава 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Загальні поняття та означення

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

яке зв'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідну.

Якщо рівняння (1.1) можна розв'язати відносно y, то одержимо диференціальне рівняння виду:

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

яке називається рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або **рівнянням у нормальній формі**.

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то рівняння (1.2) можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

У такому вигляді воно є частковим випадком більш загального рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x.y)dy = 0. \tag{1.3}$$

Розв'язком диференціального рівняння (1.1) називається диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці її в це рівняння перетворює його на тотожність.

При знаходженні розв'язку диференціального рівняння у більшості випадків необхідно виконувати операції інтегрування. У зв'язку з цим процедура знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **інтегруванням диференціального рівняння**. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою** цього рівняння.

Відповідь на питання, за яких умов рівняння (1.2) має розв'язок, дає теорема Коші.

Теорема Коші (про існування і єдність розв'язку). Якщо права частина рівняння (1.2) і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні в деякій області G, то яка б не була внутрішня точка (x_0, y_0) цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє умов y = y_0 при x = x_0, тобто $\varphi(x_0) = y_0$,

Остання умова, згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває напере д задане значення y_0 в заданій точці x_0 називають **початковою умовою**.

Геометричний зміст теореми Коші полягає в тому, що через кожну точку (x_0, y_0) з області G проходить єдина інтегральна крива. Задача знаходження розв'язку рівняння (1.2), який задовольняє вказану початкову умову, називається **задачею Коші**.

Розв'язок диференціального рівняння , в кожній точці якого порушується умова єдності, називають **особливим розв'язком.**

Диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків (сім'ю інтегральних кривих). За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим уводять поняття загального й частинного розв'язку диференціального рівняння (1.2), права частина якого задовольняє у деякій області умовам теореми.

Функція. $y=\varphi(x,C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається **загальним розв'язком** рівняння (1.2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1. при будь-якому значенні сталої C з деякої множини, функція $y=\varphi(x,C)$,є розв'язком рівняння (1.3),
2. для довільної точки (x_0 , y_0) $\in G$ можна знайти таке значення C = C_0, що має місце співвідношення $y_0=\varphi(x_0,C_0)$.

Будь-який розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$ рівняння (1.3), який одержано із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ для конкретного значення C = C_0, називається **частинним розв'язком**.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x,y,C)=0$, то такий розв'язок називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння, причому рівність $\Phi(x,y,C_0)=0$ називають **частинним інтегралом** рівняння.

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння **інтегрується в квадратурах**. Необхідно зазначити, що клас інтегрованих в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно обмежений. Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються в квадратурах.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння, яке можна записати у вигляді:

$$y' = f(x)g(y). \tag{1.4}$$

Наприклад, рівняння $y' = \dfrac{y}{x + \cos x}$ є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки його можна записати у вигляди (1.4), де $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$, а $g(y) = y.$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (1.4) перепишемо його у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y).$ Виключивши з розгляду точки, в яких $g(y) = 0$, множимо обидві частини рівняння на dx. і ділимо на g(y):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{1.5}$$

Отримане рівняння називається **рівнянням з відокремленими змінними**. Інтегруємо ліву частину рівняння по y, а праву частину по x, одержуємо

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2.$$

або

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \tag{1.6}$$

де $C_2 - C_1 = C$ - довільна стала. Вираз (1.6) є загальним інтегралом рівняння (1.4).

Якщо рівняння задано у вигляді:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

то для відокремлення змінних його не потрібно приводити до виду (1.4), а достатньо поділити обидві частини на добуток $N(y)P(x)$:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0,$$

звідки отримуємо загальний інтеграл

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C, \qquad (1.7)$$

де С - довільна стала.

Зауважимо, що при такому методі розв'язання ми можемо загубити частинні розв'язки, коли $g(y) = 0$, або $P(x) = 0$, $N(y) = 0$. Якщо існують розв'язки цих алгебраїчних рівнянь, то вони можуть належати множині розв'язків (1.7), а можуть і не належати. В останньому випадку, для одержання всіх розв'язків рівняння (1.4) їх потрібно приєднати до загального інтегралу. Розв'язки, які не входять до загального інтеграла, називаються **особливими**.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння, $y' = -\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$, що задовольняє початкову умову $y(1) = 1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$, помножимо ліву і праву частини рівняння на dx і поділимо на $\frac{1+y^2}{y}$, ми отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{ydy}{1+y^2}+\frac{xdx}{1+x^2}=0.$$

Оскільки $\int\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+C,$то після інтегрування маємо

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\ln C.$$

Скоротивши на $\frac{1}{2}$ і використавши властивості та однозначність функції $y=\ln x$, отримаємо загальний інтеграл рівняння у вигляді $(1+x^2)(1+y^2)=C.$

Задовольняємо початкову умову, підставивши в загальний інтеграл $x=1, y=1$

$$(1+1)(1+1)=C.$$

Отже $C=4$, частинний інтеграл рівняння $(1+x^2)(1+y^2)=4,$ а частинний розв'язок $y=\sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$

Приклад. Знайти всі розв’язки рівняння

$$xydx+\sqrt{1-x^2}dy=0.$$

Розв'язання. Вважаючи, що $x\neq\pm1, y\neq 0,$ поділимо обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{1-x^2}\,y\neq 0$ і перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{y}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Проінтегрувавши ліву і праву частини рівняння і взявши для зручності довільну сталу у вигляді $\ln|C|$, отримаємо

$$\ln|y|=\sqrt{1-x^2}+\ln|C|, \qquad \text{або} \qquad y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}.\ C\in R.$$

Ми отримали загальний розв'язок нашого рівняння. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $x=1, x=-1, y=0$ - розв'язки нашого рівняння. Причому розв'язок $y=0$ входить до загального при $C=0,$ а розв'язки $x=1, x=-1$ не входять, тому,що при $x=\pm 1$ маємо $C=y\neq const.$ Отже, ці розв'язки є особливими.

Остаточно, множина всіх розв'язків даного рівняння визначається формулою:

$$y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}, C\in R, x=1, x=-1.$$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння та рівняння, які до них зводяться

Функція $F(x,y)$ називається **однорідною функцією n-го порядку відносно змінних** x, y ,якщо для будь-якого $t>0$ виконується тотожність $F(tx,ty)=t^n F(x,y).$

Наприклад, функція $F(x,y)=x^2+y^2-xy$ є однорідною другого порядку, бо $F(tx,ty)=t^2x^2+t^2y^2-t^2xy=t^2F(x,y).$

Диференціальне рівняння виду:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.8}$$

де функції $M(x,y), N(x,y)$ однорідні одного порядку, називається **однорідним диференціальним рівнянням.**

Якщо вважати, що $N(x,y)\neq 0,$ то рівняння (1.8) можна переписати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \qquad (1.9)$$

Тоді функція в правій частині (1.9) буде функцією нульового порядку. Дійсно,

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=\frac{t^n M(x,y)}{t^n N(x,y)}=f(\frac{x}{y}).$$

Отже однорідне рівняння (1.8) завжди можна записати у вигляді:

$$y'=f(\frac{y}{x}). \qquad (1.10)$$

Покажемо, що рівняння (1.10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y=u(x)x,$ де $u(x)$ нова, невідома функція.

Знаходимо похідну $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$ Тоді для функції u(x) рівняння (1.10) набуває вигляду $u+x\frac{du}{dx}=f(u),$ або $xdu=(f(u)-u)dx.$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними, загальний інтеграл якого задається формулою:

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C, \text{ або } \int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C.$$

Якщо в цьому виразі замінити u на його значення $\frac{y}{x}$, то отримаємо загальний інтеграл рівняння (1.10).

Приклад. Розв’язати рівняння $xy' = \dfrac{3y^3 + yx^2}{2y^2 + x^2}$.

Розв'язання. Розділимо ліву і праву частини рівності на x $y' = \dfrac{3\dfrac{y^3}{x} + yx}{2\dfrac{y^2}{x} + x}$,

а чисельник і знаменник правої частини поділимо на x^2: $y' = \dfrac{3\dfrac{y^3}{x^3} + \dfrac{y}{x}}{2\dfrac{y^2}{x^2} + 1}$. Введемо заміну $\dfrac{y}{x} = u$, де u(x) – невідома функція.

Для функції u(x) наше рівняння запишеться у вигляді:

$u + xu' = \dfrac{3u^3 + u}{2u^2 + 1}$, або $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{3u^3 + u}{2u^2 + 1} - u$, звідки $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^3}{2u^2 + 1}$.

Прийшли до рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u^2 + 1}{u^3} du, \ \ln|x| = 2\ln|u| - \frac{1}{2u^2} + \ln|C|.$$

Переписуємо отриманий загальний інтеграл у більш компактному вигляді та повертаємося до функцій y:

$$\frac{x^2}{y^2 2} = \ln\frac{Cy^2}{|x^3|}$$

- загальний інтеграл нашого рівняння.

Розглянемо **рівняння, що зводяться до однорідних виду:**

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right), \tag{1.11}$$

де $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ - деякі сталі.

Очевидно, якщо $c_1 = c = 0$, то функція, що стоїть в правій частині (1.11), однорідна.

Нехай хоча б один з коефицієнтів c, c_1 відмінний від 0. Розглянемо два можливих випадки.

1. **Коефіцієнти** a, b, a_1, b_1 **такі, що** $ab_1 - a_1 b \neq 0.$

   Введемо нові змінні $x = x_1 + k, y = y_1 + l,$ де k,l - деякі, поки що невідомі числа.

   Покажемо, як знаходити ці числа. Перейдемо в рівнянні (1.11) до нових змінних

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ak + bl + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1k + b_1l + c_1}\right). \qquad (1.12)$$

Знайдемо k, l як розв'язки системи

$$\begin{aligned} &ak + bl + c = 0, \\ &a_1k + b_1l + c_1 = 0. \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Знайшовши розв'язок системи (система має єдиний розв’язок, оскільки визначник системи за умовою відмінний від нуля), підставляємо їх в рівняння (1.12), яке набуває вигляду:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}\right), \qquad (1.14)$$

і стає однорідним. Знаходимо його розв'язок і повертаємося до змінних x, y.

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}.$$

Розв'язання. Маємо рівняння типу (1.11). Оскільки $-2-4=-6\neq 0,$ робимо заміну $x=x_1+k, y=y_1+l.$ Для знаходження k,l складаємо систему (1.13)

$$\begin{aligned}&-2k+4l-6=0,\\&k+l-3=0.\end{aligned}$$

Її розв'язок $k=1, l=2.$ Покладаємо $x=x_1+1, y=y_1+2$ і для $x_{1,}, y_1$ одержуємо рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{4y_1-2x_1}{x_1+y_1}.$$

Поділимо чисельник і знаменник правої частини на x_1

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{4\frac{y_1}{x_1}-2}{1+\frac{y_1}{x_1}}.$$

Для знаходження розв'язку отриманого однорідного рівняння, робимо заміну $y_1=xu(x)$ і зводимо рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними

$$x_1\frac{du}{dx}=\frac{-u^2+3u-2}{u+1}.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dx_1}{x_1}=-\frac{u+1}{u^2-3u+2}du,$$

інтегруємо та повертаємося до x,y:

$$\frac{(1-\frac{y_1}{x_1})^2}{(2-\frac{y_1}{x_1})^3}=Cx_1,\ (x-y+1)^2=C(2x-y)^3.$$

2. Коефіцієнти a,b,a_1,b_1 **такі, що** $ab_1-a_1b=0.$

Це означає, що коефіцієнти пропорційні, тобто, $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$, і рівняння (1.11) переписується у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_1}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right).$$

Робимо заміну $z(x) = a_1 x + b_1 y.$ Тоді $\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}$ і рівняння (1.11) переписується у вигляді

$$\frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_1}\right),$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Знаходимо його загальний інтеграл

$$\frac{dz}{dx} = b_1 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_1}\right) + a_1, \quad \int \frac{dz}{b_1 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_1}\right) + a_1} = \int dx + C,$$

і після інтегрування повертаємося до $x, y.$

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{2x - 2y + 3}.$$

Розв'язання. У нашому випадку -2 + 2=0.

Робимо заміну $z = x - y.$ Тоді $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$ і рівняння для функції z(x) набуває вигляду

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{2z + 3}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруємо його

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z + 1}{2z + 3}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z + 2}{2z + 3}, \qquad \frac{(2z + 3)}{z + 2} dz = dx.$$

Звідки $2z - \ln|z+2| = x + \ln C.$

Повертаємось до $y(x)$ і остаточно маємо

$$\ln|C(x-y+2) = x - 2y, \quad \text{або} \quad C(x+y-2) = e^{x-2y}.$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння виду:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.15}$$

де $P(x), Q(x)$ - задані неперервні на деякому проміжку функції, називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

Якщо $Q(x) = 0,$ то рівняння (4.1) набуває вигляд:

$$y' + P(x)y = 0 \tag{1.16}$$

і називається **однорідним** лінійним рівнянням, якщо $Q(x) \neq 0,$ то **неоднорідним.**

Очевидно, що однорідне лінійне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y, \frac{dy}{y} = -P(x)dx, \ln y = -\int P(x)dx + \ln|C|.$$

Отже, остаточно загальний розв'язок (1.16) має вигляд:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{1.17}$$

Розглянемо два методи знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння (1.15).

1. **Метод Бернуллі (метод підстановки)**.

За цим методом шукаємо розв'язок (6.1) у вигляді добутку двох функцій

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Тоді $y' = u'v + v'u$ і, підставивши у та y' в (1.15), дістанемо

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \tag{1.18}$$

Оскільки $y(x)$ дорівнює добутку двох функцій, одну з них можна вибрати довільно. Виберемо за $v(x)$ один з розв'язків однорідного рівняння $v' + P(x)v = 0$, поклавши в (1.17) C=1, отримаємо

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію в (1.19), дістанемо

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Ми отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд:

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (1.15) має вигляд:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{1.19}$$

2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного рівняння, тобто співвідношення (1.17). Загальний розв’язок неоднорідного рівняння (1.15) шукаємо у вигляді (1.17), взявши в ньому за C деяку функцію C(x), тобто

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.20}$$

Підберемо C(x) так, щоб функція (1.20) задовільняла (1.15).

Диференціюємо (1.20)

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{1.21}$$

і підставляємо (1.20) та (1.21) у рівняння (1.15):

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x), P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Знаходимо $C(x)$:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

отже

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C, \tag{1.22}$$

де C – довільна стала.

Підставляючи (1.22) в (1.20), отримаємо загальний розв'язок рівняння (1.15) у вигляді (1.19).

Зауваження. На практиці не слід застосовувати формально отриману формулу, а в кожному конкретному випадку слід повторювати наведені вище викладки.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. 1. Застосуємо метод Лагранжа.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + 2xy = 0:$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \Longrightarrow \ln|y| = -x^2 + \ln|C|.$$

Отже,

$$y = Ce^{-x^2}. \tag{1.23}$$

Вважаємо тепер в (1.23) C функцією x і підставляємо $y = C(x)e^{-x^2}$ у наше рівняння. Оскільки

$$y'(x) = C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x),$$

то

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}C(x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

звідки

$$C'(x) = x,\ C(x) = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in R.$$

Таким чином, загальний розв'язок

$$y(x) = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}.$$

2. Застосуємо метод Бернуллі.

Шукаємо розв'язок у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$, де $v(x)$ - будь-який частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Для знаходження $v(x)$ скористаємося вище отриманою формулою (1.23), взявши в ній, наприклад, C=1. Отже, $v(x) = e^{-x^2}$.

Підставляємо $y(x) = e^{-x^2}u(x)$ в наше рівняння:

$$e^{-x^2}u'(x) - 2xe^{-x^2}u(x) + 2xe^{-x^2}u(x) = xe^{-x^2}.$$

Звідки знаходимо $u(x)$: $u'(x) = x, u(x) = \frac{x^2}{2} + C, C \in R.$

Отже, остаточно $y(x) = (\frac{x^2}{2} + C)e^{-x^2}$.

<u>Зауваження.</u> Інколи диференціальне рівняння I порядку є лінійним не відносно y, а відносно x. Тобто, розглядаючи x як функцію від y $x = x(y)$, його можна записати у вигляді

$$x' + P(y)x = Q(y).$$

Розв'язуючи це рівняння вказаними вище методами, аналогічно знаходимо його загальний розв'язок:

$$x(y) = e^{-\int P(y)dy}(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C), \ C \in R.$$

1.5. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{1.24}$$

де $P(x), Q(x)$ - задані неперервні на деякому проміжку функції, а α - дійсне число, відмінне від 0 і 1, називається **рівнянням Бернуллі**.

Якщо $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$, з рівняння (1.24) ми отримуємо лінійне диференціальне рівняння

Якщо $\alpha > 0,$ то частинним розв'язком (1.24) буде розв'язок $y = 0$.

Вважаємо тепер $y \neq 0$. Покажемо, що заміною

$$z = y^{1-\alpha},$$

рівняння (1.24) зводиться до лінійного. Поділимо праву і ліву частини (7.1) на y^{α}:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{-\alpha+1} = Q(x). \tag{1.25}$$

Оскільки $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, звідки $y^{-\alpha}y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$, то переходячи в рівнянні (1.25) до $z(x)$, матимемо рівняння

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$$

або рівняння

$$z' + P(x)(1-\alpha)z = (1-\alpha)Q(x). \tag{1.26}$$

Рівняння (1.26) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням. Підставивши в його загальний розв'язок замість z $y^{1-\alpha}$, отримуємо загальний інтеграл рівняння Бернуллі.

Зауваження. При розв'язуванні конкретних рівнянь Бернуллі їх можна не перетворювати на лінійне, а відразу шукати розв'язок за методом Бернуллі у вигляді: $y(x) = u(x)v(x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2y = e^x y^2 . \qquad (1.27)$$

Розв'язання. Це рівняння Бернуллі при $\alpha = 2$.

Розв'яжемо його методом Бернуллі.

Шукаємо $y(x)$ у вигляді $y(x) = u(x)v(x)$ підставляємо в наше рівняння (1.27):

$$u'v + u(v' + 2v) = e^x u^2 v^2 . \qquad (1.28)$$

Функцію $v(x)$ знаходимо як розв'язок рівняння $v' + 2v = 0$.

Маємо $\frac{dv}{dx} = -2v$. Звідси $\frac{dv}{v} = -2dx$, $\ln v = -2x + C$. При $C = 0$

$$v(x) = e^{-2x} .$$

Підставляємо знайдену функцію $v(x)$ в (1.28) і отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними для $u(x)$:

$$u'e^{-2x} = e^x u^2 e^{-4x} .$$

Знаходимо його загальний розв'язок : $-\frac{1}{u} = -C - e^{-x}$, або

$$u = \frac{1}{e^{-x} + C}.$$

Отже, остаточно

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + C} \quad -$$

загальний розв'язок нашого рівняння.

1.6. Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.29}$$

називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad . \tag{1.30}$$

Будемо вважати, що функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ неперервні і диференційовані в деякій області G, неперервними в цій області є також і функції $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Можна довести, що необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, є виконання рівності:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.31}$$

Оскільки, за означенням, повний диференціал для функції двох змінних визначається формулою

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\,,$$

то з (1.30) матимемо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)\,,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)\,. \qquad (1.32)$$

Рівняння (1.29) можна записати у вигляді $dU = 0$, а загальний інтеграл як $U(x,y) = c$, $c \in R$. Таким чином, розв'язування рівняння (8.1)зводиться до знаходження функції $U(x,y)$ за її частинними похідними, тобто до знаходження функції U, що задовольняє (1.32).

Розглянемо один із способів знаходження функції $U(x,y)$. Проінтегруємо першу рівність (1.32) по x. Ми отримаємо

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx = \Phi(x,y) + \varphi(y) \qquad , \qquad (1.33)$$

де $\Phi(x,y)$ - одна з первісних функції $P(x,y)$, що розглядається як функція тільки змінної x (y відіграє роль параметра).

Підставляємо знайдену функцію $U(x,y)$ в друге рівняння (1.32) і одержуємо рівняння для знаходження $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x,y)\,.$$

Знайшовши $\varphi(y)$, підставляємо її в (1.33) і одержуємо шукану функцію $U(x,y)$ і, відповідно, загальний інтеграл рівняння $U(x,y) = C$.

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0.$$

Розв'язання. У цьому прикладі

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x,\ Q(x, y) = 2xy.$$

Перевіримо виконання умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Отже, задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, тобто існує функція $U(x, y)$ така, що

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= x^2 + y^2 + 2x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2xy. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Інтегруємо перше з співвідношень (1.34) по x, вважаючи y сталою:

$$U = \frac{x^3}{3} + y^2 x + x^2 + \varphi(y), \tag{1.35}$$

де $\varphi(y)$ - довільна диференційована функція .

Диференціюємо одержану функцію по y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y).$$

Підставляємо знайдену похідну в ліву частину другого співвідношення (1.34):

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy ,$$

звідки $\varphi'(y) = 0$, тобто $\varphi(y) = C_1$.

Підставивши в (1.34), отримаємо $U(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 x + x^2 + C_1$.

Загальний інтеграл $U(x,y) = C$ має вигляд:

$$\frac{x^3}{3} + y^2 x + x^2 = C .$$

Глава 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні поняття та означення

Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду:

$$F(x, y, y', y'', .. y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

У рівняння n-го порядку обов'язково входить похідна $y^{(n)}$, наявність же інших змінних, тобто $x, y, y', ..., y^{(n)}$ є необов'язковою.

Нормальним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння (2.1), розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) . \tag{2.2}$$

Розв'язком рівняння (2.2) на деякому інтервалі $(a;b)$ називається n разів неперервно диференційована на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по $x \in (a;b)$.

Графік розв'язку диференціального рівняння (2.1) або (2.2) називається **інтегральною кривою** диференціального рівняння.

Загальний розв'язок рівняння **n**-го порядку залежить від **n** довільних сталих, тобто є функцією виду:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{2.3}$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявному вигляді:

$$\Phi(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 , \tag{2.4}$$

то його називають загальним інтегралом рівняння (2.1).

Розв’язок диференціального рівняння, який одержується із загального розв’язку при **конкретних значеннях сталих** $c_1^{\,0}, c_2^{\,0}, \dots, c_n^{\,0}$ **називається частинним розв’язком.**

Для того, щоб із загального розв’язку рівняння виділити частинний розв’язок, треба задати початкові умови. У випадку рівняння **n**-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_0',\, y''(x_0) = y_0'', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{2.5}$$

Задача знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (2.5), називається **задачею Коші**.

Теорема (існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Якщо права частина рівняння (2.2) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументах $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ визначені і неперервні в деякій області **G**, то для будь-якої внутрішньої точки $(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ цієї області дане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, що задовольняє початкові умови (2.5).

Розглянемо методи розв’язання різних рівнянь **n**-го порядку.

2.2. Деякі рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку

Рівняння першого типу. Розглядається рівняння виду:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.6}$$

тобто рівняння, що **містить лише похідну n-го порядку невідомої функції і незалежну змінну**. У цьому рівнянні $f(x)$ - задана неперервна в деякій області функція.

Метод знаходження загального розв'язку цього рівняння полягає в **n-**кратному інтегруванні по x лівої і правої частини рівняння.

Приклад.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''' = \frac{2}{x^3}$, що задовольняє початковим умовам $y(1) = \frac{1}{2}; y'(1) = 0; y''(1) = -2$.

Розв'язання. Послідовно 3 рази інтегруємо ліву і праву частини рівняння:

$$y'' = -\frac{1}{x^2} + C_1; y' = \frac{1}{x} + C_1 x + C_2; y = \ln x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Щоб знайти C_1, C_2, C_3 ,що задовольняють початкові умови і отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = \frac{1}{2} \\ 1 + C_1 + C_2 = 0 \\ -1 + C_1 = -2 \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи: $C_1 = -1; C_2 = 0; C_3 = 1.$

Отже, $y = \ln x - \frac{1}{2} x^2 + 1$ - шуканий частинний розв'язок.

Рівняння другого типу. Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}). \qquad (2.7)$$

Це рівняння, що **містить лише похідні n-го і (n-1)-го порядків**.

Введемо нову функцію:

$$y^{(n-1)}(x) = u(x).$$

Тоді (2.7) запишеться у вигляді

$$u' = f(u), \tag{2.8}$$

що представляє собою рівняння I порядку з відокремлюваними змінними. Якщо знайти загальний розв'язок (2.8): $u = \psi(x, C_1)$, то, повернувшись до функції y, отримаємо рівняння

$$y^{(n-1)} = \psi(x, C_1)$$

рівняння **(n-1)-**го порядку виду (2.6).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = (y'')^2$.

Розв'язання. Вводимо нову функцію $u(x) = y''(x)$. Тоді маємо

$$u' = u$$

диференціальне рівняння I порядку з відокремлюваними змінними. Шукаємо його загальний розв'язок:

$$\frac{du}{dx} = u^2; \frac{du}{u^2} = dx; -\frac{1}{u} = x + C_1 \implies u = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Повертаючись до $y(x)$ маємо диференціальне рівняння II порядку виду (2.6): $y'' = -\dfrac{1}{x + C_1}$. Після інтегрування два рази отримуємо:

$$y' = -\ln|x + C_1| + C_2;$$

$$y = -(x + C_1)\ln|x + C_1| + x + C_2 x + C_3.$$

Рівняння третього типу. Розглянемо рівняння

$$F(x, y^{(k)},..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.9}$$

яке **не вміщує явно шукану функцію** $y(x)$ **та її похідні до (к-1)-го порядку включно**.

За допомогою заміни $y^{(k)}(x) = z(x)$ одержуємо рівняння **(n-k)**-го порядку:

$$F(x, z, z',..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Якщо вдається знайти його загальний розв'язок $z(x) = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$, то знаходження загального розв'язку (2.9) зводиться до знаходження загального розв'язку рівняння **к**-го порядку виду (2.6):

$$y^k(x) = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y' + x^2$.

Розв'язання. Здійснюємо заміну $y' = z(x), y'' = z'(x)$ і зводимо наше рівняння до лінійного рівняння I порядку

$$xz' = z + x^2.$$

Перепишемо його у вигляді:

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

і знайдемо загальний розв'язок за методом Бернулі у вигляді $z = u(x)v(x)$:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x.$$

Функцію $v(x)$ шукаємо як частинний розв'язок рівняння

$$v' - \frac{v}{x} = 0 : \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x.$$

Тоді для функції $u(x)$ маємо: $u'x = x \implies du = dx; u = x + C_1$.

Отже, $z(x) = (x + C_1)x$.

Повертаючись до $y(x)$, отримаємо рівняння I порядку:

$$y'(x) = (x + C_1)x,$$

загальний розв'язок якого

$$y = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$$

Рівняння четвертого типу. Вкажемо метод інтегрування рівнянь виду

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.10}$$

яке не вміщує явно незалежну змінну x.

Підстановка $y'(x) = p(y)$ знижує його порядок на одиницю. Наприклад, для $n = 2$ рівняння (2.10) набуває вигляду:

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{2.11}$$

Зробивши заміну

$$y'(x) = p(y), y''(x) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

ми з (2.11) одержуємо рівняння I порядку відносно $p(y): F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$, де y грає роль незалежної змінної. Розв'язавши його, знаходимо $p = \varphi(y, C_1)$, або, повертаючись до $y(x), y' = \varphi(y, C_1)$. Це диференціальне рівняння I порядку з відокремлюваними змінними: $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$. Знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx; \int\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад: Знайти частинний розв’язок рівняння

$$yy'' = (y)^2,$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = 1; y'(0) = 1$.

Розв’язання. Зробимо заміну: $y' = p(y); y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Тоді рівняння запишемо у вигляді:

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Шукаємо його загальний розв'язок:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|, \text{ або } p = C_1 y$$

(особливий розв'язок $p = 0$, тобто $y' = 0, y = c$).

Повертаючись до $y(x)$ маємо:

$$y' = C_1 y.$$

В отриманій рівності покладемо $x = 0$ і, враховуючи початкові умови, знайдемо C_1: $y'(0) = C_1 y(0) \implies 1 = C_1$. Отже, маємо рівняння I порядку: $y' = y$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dy}{dx} = y; \dfrac{dy}{y} = dx; \ln|y| = x + \ln|C_2|$ або $y = C_2 e^x$.

Задовольняємо початкові умови і знаходимо $C_2 : y(0) = C_2 e^0 \Rightarrow C_2 = 1$.

Отже, $y = e^x$ - шуканий частинний розв'язок.

2.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння виду:

$$\alpha_0(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = \varphi(x), \tag{2.12}$$

де коефіцієнти $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ і вільний член $\varphi(x)$ - задані функції, називається **лінійним диференціальним рівнянням II порядку**.

Якщо $\varphi(x) = 0$, то рівняння (2.12) називається **однорідним**, в протилежному випадку **неоднорідним**. Те, що рівняння (2.12) лінійне, означає, що невідома функція і її похідні входять в рівняння лише в першому степені і відсутні добутки функції y на її похідні та добутки похідних.

Оскільки (2.12) може бути переписана у вигляді

$$y'' = \frac{\varphi(x) - \alpha_1(x)y' - \alpha_2(x)y}{\alpha_0(x)}$$

($\alpha_0(x) \equiv 0$, бо інакше це не було б рівнянням II порядку), то воно є частинним випадком диференціального рівняння виду (2.2), а отже, для нього має місце теорема існування і єдиності розв'язку.

2.4. Однорідні лінійні рівняння

Розглянемо однорідне рівняння:

$$\alpha_0(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_2(x)y = 0. \tag{2.13}$$

Поділимо ліву і праву частину на $\alpha_0(x)$ позначимо через

$$b_1(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_0(x)}, b_2(x) = \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_0(x)}.$$

Тоді з (2.13) отримаємо

$$y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0, \qquad (2.14)$$

яке і будемо розглядати надалі.

Встановимо деякі властивості розв'язків рівняння (2.14), які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв'язки рівняння (2.14), то їх лінійна комбінація, а саме функція $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння при будь-яких сталих C_1, C_2.

Для доведення цієї теореми достатньо підставити функцію $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ та її похідні $y' = C_1y_1'(x) + C_1y_2'(x)$, $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$ в (2.14) і згрупувати доданки відносно C_1, C_2:

$C_1(y_1'' + b_1(x)y_1' + b_2(x)y_1) + C_2(y_2'' + b_1(x)y_2' + b_2(x)y_2) = 0$.

Ми отримали в правій частині **0**, бо вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю ($y_1(x)$, $y_2(x)$ за умовою є розв'язками рівняння).

Оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння II порядку містить дві довільні сталі C_1, C_2, то виникає питання: чи не є розв'язок $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$,- розв'язки (2.14), загальним розв'язком (2.14). Виявляється, не завжди. Покажемо це на простому прикладі.

Розглянемо рівняння $y'' + 4y = 0$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $y_1 = \sin 2x$ та $y_2 = 10\sin 2x$ є його частинними розв'язками. Але $y(x) = C_1 \sin 2x + 10C_2 \sin 2x$, будучи розв'язком рівняння, загальним розв'язком не буде. Дійсно, функція $y = \cos 2x$, що є розв'язком задачі Коші $y'' + 4y = 0$,

$y(0)=1; y'(0)=0$, не може бути отриманою з лінійної комбінації $y(x)=C_1\sin 2x+10C_2\sin 2x$, оскільки ні при яких C_1, C_2 $y(0)$ не може бути рівною 1: $C_1\sin 0+10C_2\sin 0=0\neq 1$.

Щоб знайти, за яких умов лінійна комбінація частинних розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$ виражає загальний розв'язок рівняння (2.14), введемо поняття фундаментальної системи розв'язків.

Означення. Два частинних розв’язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (2.14) утворюють **фундаментальну систему** розв’язків на деякому інтервалі (a,b), якщо в кожній точці цього проміжку визначене $W(x)\neq 0$, де

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1' \tag{2.15}$$

називається **визначником Вронського** або **вронскіаном** цих функцій.

Теорема 2 (про структуру загального розв’язку). Якщо два частинних розв’язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (2.14) утворюють на проміжку (a,b) фундаментальну систему, то функція $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, де C_1, C_2 - довільні сталі, є його загальним розв’язком.

Доведення. З Теореми 1 випливає, що $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ є розв’язок (2.14) за будь-яких значень сталих C_1, C_2. Щоб довести, що цей розв’язок є загальним, покажемо, що з нього можна отримати єдиний частинний розв’язок, який задовольняє задані початкові умови:

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \tag{2.16}$$

де $x_0\in(a;b)$, а y_0, y_0' - довільні числа.

Підставляючи в початкові умови (2.16) нашу функцію $y(x)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases}.$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського $W(x_0)$, який не дорівнює **0** (бо за умовою $y_1(x)$ і $y_1(x)$ утворюють фундаментальну систему на (a,b), якому належить точка x_0), то система має єдиний розв’язок. Отже, з розв'язку $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ми завжди можемо виділити єдиний частинний розв'язок, що задовольняє вказаним початковим умовам, тобто формула $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ визначає загальний розв'язок (2.14), що і треба було довести.

Вкажемо метод, за яким, знаючи ненульовий частинний розв’язок $y_1(x)$,можна знайти $y_2(x)$ так, щоб $y_1(x)$ і $y_2(x)$ утворювали фундаментальну систему.

У рівнянні (2.14) зробимо заміну $y = y_1(x) z(x)$, де $z(x)$ - невідома функція. Знаходимо похідні і підставляємо y, y', y'' в (2.14). Згрупувавши подібні доданки, будемо мати:

$$y_1 z'' + \{2y_1' + b_1(x) y_1\} z' + \left[y_1'' + b_1(x) y_1' + b_2(x) y_1 \right] z = 0.$$

Оскільки $y_1(x)$ - розв'язок рівняння (2.14), то вираз в квадратних дужках дорівнює **0**. Отже, для знаходження $z(x)$ ми маємо диференціальне рівняння II порядку:

$$y_1 z'' + \{2y_1' + b_1(x) y_1\} z' = 0,$$

що допускає пониження порядку. Переходимо до функції $u(x)$ за формулою $z'(x) = u(x)$ і для $u(x)$ дістаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'y_1 + \{2y_1' + b_1(x)y_1\}u = 0 .$$

Знаходимо його розв’язок:

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + b_1(x)y_1}{y_1}dx; \ln u = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int b_1(x)dx;$$

$$\ln u = -2\int \frac{dy_1}{y_1} - \int b_1(x)dx .$$

Оскільки ми шукаємо частинний розв’язок, то покладемо $C \equiv 0$:

$$\ln u = -2\ln y_1 - \int b_1(x)dx \Rightarrow u = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int b_1(x)dx}dx .$$

Повертаючись послідовно до зроблених замін, остаточно маємо розв’язок $y_2(x)$ у вигляді:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int b_1(x)dx}dx . \qquad (2.17)$$

Безпосереднім підрахунком визначника Вронського неважко переконатися, що $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$.

Розв’язання. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що $y_1(x) = 1$ буде розв'язком нашого рівняння. Тоді за (2.17), враховуючи, що в нашому випадку $b_1(x) = -\frac{1}{x}$, маємо:

$$y_2(x) = \int e^{\int \frac{dx}{x}}dx = \int e^{\ln x}dx = \frac{x^2}{2}. \text{ Отже } y(x) = C_1 + C_2\frac{x^2}{2}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, яке має частинний розв'язок $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. За формулою (2.17) маємо:

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} e^{-\int \frac{2dx}{x}} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{1}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx =$$

$$= -\frac{\sin x}{x} ctgx == -\frac{\cos x}{x}.$$ Тому $y(x) = \frac{1}{x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$.

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння II порядку виду:

$$y'' + b_1(x) y' + b_2(x) y = f(x). \tag{2.18}$$

Метод знаходження його загального розв'язку ґрунтується на теоремі:

Теорема 3 (про структуру загального розв'язку неоднорідного рівняння). Якщо $y_{чн}$ - який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.18), а $y_{зо}$ - загальний розв'язок відповідного йому однорідного рівняння (2.14), то загальним розв'язком y рівняння (2.18) є функція

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}. \tag{2.19}$$

Доведення. Підставимо (2.19) в (2.18) і згрупуємо доданки:

$$\left\{y_{чн}'' + b_1(x)y_{чн}' + b_2(x)y_{чн'}\right\} +$$

$$+\left\{y_{зо}'' + b_1(x)y_{зо}' + b_2(x)y_{зо}\right\} = f(x).$$

Перший вираз у фігурних дужках дорівнює $f(x)$, бо $y_{чн}$ є розв'язком (2.18), а другий вираз у фігурних дужках дорівнює **0**, бо $y_{зо}$ є розв'язком рівняння (2.14). Отже (2.19) є розв'язком (2.18).

Доведемо, що (2.19) є загальним розв'язком. Для цього покажемо, що з (2.19) можна знайти єдиний розв'язок (2.18), що задовольняє певним початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \text{ де } x_0 \in (a;b).$$

Як ми знаємо з Теореми 2, $y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - фундаментальна система розв’язків (2.14). Тобто (2.19) можна записати у вигляді:

$$y_{зн} = y_{чн} + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \tag{2.20}$$

Підставимо (2.20) у наші початкові умови:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_{чн}'(x_0) \end{cases}. \tag{2.21}$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв’язків, то визначник системи – визначник Вронського, відмінний від **0**, і система має єдиний розв’язок. Це означає, що формула (2.20) виражає загальний розв’язок рівняння (2.18).

Теорема доведена.

Із сформульованої теореми випливає, що для знаходження загального розв'язку (2.18) крім розв'язку однорідного рівняння треба знайти який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Для знаходження $y_{чн}$ може бути використаний метод варіації довільних сталих або, як ще називають цей метод, метод Лагранжа.

2.6. Метод Лагранжа

Нехай ми знайшли $y_{зо}$ у вигляді $y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Будемо шукати $y_{чн}$ у вигляді

$$y_{чн} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad , \tag{2.22}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ - деякі невідомі, поки що, диференційовані функції. Підберемо їх так, щоб функція $y_{чн}(x)$ була розв'язком (2.18).

Знаходимо

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) +$$

$$+ C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x) \tag{2.23}$$

Накладемо на $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{2.24}$$

Враховуючи (2.23), матимемо:

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x),$$

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_2(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Підставляємо $y(x), y'(x), y''(x)$ в (2.18) і перегруповуємо:

$$C_1(x)\left[y_1'' + b_1(x)y_1' + b_2(x)y_1\right] + \quad C_2(x)\left[y_2'' + b_1(x)y_2' + b_2(x)y_2\right] + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, бо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв'язки однорідного рівняння (2.14). Таким чином

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \tag{2.25}$$

Отже вираз (2.22) буде частинним розв'язком рівняння (2.18), коли функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольнятимуть систему, складену з (2.24) і (2.25):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{2.26}$$

Визначник системи – відмінний від нуля визначник Вронського (бо $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків). Отже система має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Проінтегрувавши ці функції, знаходимо:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_3, C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_4.$$

Але оскільки ми шукаємо один з частинних розв'язків рівняння, то можемо покласти $C_3 = C_4 = 0$. Підставивши знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (2.22), знайдемо розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y'' + \frac{y'}{x} = x, x > 0$.

Розв’язання. Знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + \frac{y'}{x} = 0.$$

Маємо рівняння, що допускає пониження порядку. Заміна $y' = z(x)$ зводить його до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$z' = -\frac{z}{x}; \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}; \ln z + \ln x = \ln C_1;\ z = \frac{C_1}{x}.$$

Тоді $y' = \frac{C_1}{x}$, звідки $y_{зо} = C_1 \ln x + C_2$, де $y_1(x) = \ln x, y_2(x) = 1$.

Дані розв’язки $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв’язків при $x > 0$, бо визначник Вронського $\begin{vmatrix} \ln x & 1 \\ \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \neq 0$ при всіх $x > 0$.

За методом Лагранжа шукаємо частинний розв’язок $y_{чн}$ неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)\ln x + C_2(x).$$

Для знаходження $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складаємо систему виду (2.26)

$$:\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)1 = 0 \\ C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x)0 = x \end{cases}.$$

Розв’язок системи $C_1'(x) = x^2; C_2'(x) = -x^2 \ln x$. Проінтегрувавши, знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ (для знаходження $C_2(x)$ застосуємо метод інтегрування частинами):

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3}; C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9}.$$

Отже $y_{чн} = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9}$, а $y_{зн} = C_1 \ln x + C_2 - \frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9}$.

При знаходженні $y_{чн}$ часто буває корисною

Теорема 4 (про суперпозицію розв'язків). Якщо $y_{чн}^{(1)}$ - частинний розв'язок рівняння

$$y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = f_1(x),$$

а $y_{чн}^{(2)}$ - частинний розв'язок рівняння

$$y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = f_2(x)$$

то $y_{чн}^{(1)} + y_{чн}^{(2)}$ є частинним розв'язком рівняння

$$y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Доведення теореми очевидне, якщо безпосередньо підставити $y_{чн}^{(1)} + y_{чн}^{(2)}$ в рівняння.

2.7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо частинний випадок рівняння (2.14), коли $b_1(x)$ і $b_2(x)$ - сталі:

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in R \tag{2.27}$$

Будемо шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді $y = e^{kx}$, де k - стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Тоді знаходимо $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$ і підставляємо в (2.27):

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то з останнього рівняння маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.28}$$

Рівняння (2.28) називається **характеристичним рівнянням** диференціального рівняння (2.27). Знаходимо його корені. В залежності від дискримінанта можливі три варіанти.

I. Рівняння (2.28) має **два дійсних різних розв'язки** $k_1 \neq k_2 \ (D > 0)$.

У цьому випадку функції $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$ - розв'язки (2.27), що утворюють фундаментальну систему, бо визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_2 x} k_2 \end{vmatrix} = e^{k_1 x} e^{k_2 x} (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, в цьому випадку

$$y_{зо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{2.29}$$

II. Рівняння (2.28) має **один кратний корінь** $k_1 = k_2 \ (D = 0)$.

Покажемо, що в цьому випадку $y_1(x)$ і $y_2(x)$ можуть бути знайдені у вигляді :

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \ y_1(x) = k_2 e^{k_1 x}.$$

Перш за все переконаємося, що $y_2(x)$ є коренем рівняння. Знаходимо похідні:

$$y_2' = e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}, \ y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}.$$

Підставляємо в (2.27) і групуємо: $e^{k_1 x}\left[x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1)\right] = 0$.

Оскільки k_1 - корінь (2.28), то $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. За теоремою Вієта $k_1 + k_1 = -p$, тобто $p = -2k_1$, а отже $p + 2k_1 = 0$. Отже вираз в квадратних дужках дорівнює нулю, а це означає, що $y_2(x) = xe^{k_1 x}$ - розв'язок (2.27).

Покажемо, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Складаємо і безпосередньо підраховуємо вронскіан:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & xe^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_{12} x}(k_1 x + 1) \end{vmatrix} = e^{2k_1 x}(1 + xk_1 - xk_1) = e^{2k_1 x} \neq 0$$

для будь-яких $x \in R$. таким чином в цьому випадку

$$y_{зо} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x). \tag{2.30}$$

III. Рівняння (2.28)має **комплексно-спряжені корені** $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(D < 0)$. Тоді $y_1(x) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha x} e^{i\beta}$, $y_2(x) = e^{\alpha - i\beta} = e^{\alpha x} e^{-i\beta}$.

Якщо використати формулу Ейлера, то $y_1(x)$ і $y_2(x)$ можна записати у вигляді:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

або

$$y_1(x) = \hat{y}_1 + i\hat{y}_2, \; y_2(x) = \hat{y}_1 - i\hat{y}_2,$$

де

$$\hat{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \; \hat{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Доведемо лему.

Лема. Якщо функція $y(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком рівняння (2.27), то і функції

$u(x), v(x)$ також є розв'язками (2.27).

Доведення. Оскільки $y(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком , то воно задовольняє (2.27), тобто:

$$(u+iv)''+p(u+iv)'+q(u+iv)=0\,.$$

Перегрупувавши, отримаємо:

$$(u''+pu'+qu)+i(v''+pv'+qv)=0\,.$$

Але комплексна функція дорівнює **0** тоді і тільки тоді, коли окремо її дійсна і уявна частини рівні нулю. Тобто, остання рівність можлива лише коли

$$\begin{cases} u''+pu'+qu=0 \\ v''+pv'+qv=0 \end{cases}.$$

А це і означає, що $u(x)$ і $v(x)$ - розв'язки (2.27).

Лема доведена.

Отже, користуючись лемою, можна сказати, що оскільки $y_1(x)$ - розв'язок нашого рівняння, то і $\hat{y}_1$ і $\hat{y}_2$ теж будуть його розв'язками. Покажемо, що вони утворюють фундаментальну систему. Рахуємо визначник Вронського:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}=$$
$$=e^{2\alpha x}(\alpha\cos\beta x\sin\beta x+\beta\cos^2\beta x-\alpha\cos\beta x\sin\beta x+\beta\sin^2\beta x)=$$
$$=e^{2\alpha x}\beta\neq 0,$$

бо за умовою $k_{1,2}$ - комплексні, отже $\beta \neq 0$. Таким чином, у цьому випадку

$$y_{зо} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (2.31)$$

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівнянь:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

2) $y'' + 5y' = 0$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

4) $y'' + 4y = 0$

5) $y'' + 6y' + 10y = 0$

Розв’язання. 1) Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1; k_2 = 2$ і за (2.29) : $y_{зо} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) Характеристичне рівняння в цьому випадку:

$$k^2 + 5k = 0,$$

$k_1 = 0; k_2 = -5$ і за (2.29) : $y_{зо} = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

3) Характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

має кратний корінь $k = 3$. Отже за (2.30) : $y_{зо} = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

4) Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4 = 0,$$

яке має чисто уявні корені $k = \pm 2i$. Загальний розв’язок отримуємо з (2.31) при умові, що $\alpha = 0$, а $\beta = 2$: $y_{зо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

5) У цьому випадку характеристичне рівняння:

$$k^2+6k+10=0,$$

що має корені $k_{1,2}=-3\pm i$. Отже $\alpha=-3,\ \beta=1$ і з (2.31): $y_{зо}=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

2.8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо частинний випадок рівняння (2.18):

$$y''+py'+qy=f(x),\ \ p,q\in R \tag{2.32}$$

де p,q - деякі дійсні числа, а $f(x)$ - задана функція, неперервна на $(a;b)$.

Як випливає з Теореми 3, $y_{зн}=y_{зо}+y_{чн}$.

Метод знаходження $y_{зо}$ ми розглянули в попередньому параграфі. Для знаходження $y_{чн}$ у випадку, коли $f(x)$ довільна диференційована функція, може бути використаний метод Лагранжа (див. 2.6). Але, якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то знайти $y_{чн}$ можна простіше, не використовуючи операцію інтегрування. Розглянемо два випадки спеціального виду функції $f(x)$.

I. Права частина спеціального виду першого типу.

Нехай

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x},$$

де $P_n(x)$ - многочлен n-го порядку (може бути і нульового степеня),

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ \ a\in \mathrm{R}.$$

1) Розглянемо варіант, коли a **не співпадає з коренями характеристичного рівняння**: $a \neq k_1$, $a \neq k_2$.

Тоді шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = Q_n(x)e^{\alpha x} , \tag{2.33}$$

де $Q_n(x)$ - також многочлен n-го степеня

$$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n ,$$

але з поки-що невідомими коефіцієнтами A_i. Знаходимо $y_{чн}', y_{чн}''$, підставляємо $y_{чн}, y_{чн}', y_{чн}''$ в (2.32), скорочуємо на $e^{\alpha x}$. Ми приходимо до рівності, де і в лівій і в правій частинах стоять многочлени n-го степеня, але многочлен у правій частині містить невідомі коефіцієнти. Два многочлени рівні, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях x. Отже, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, ми отримаємо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A_i, розв'язавши яку, знайдемо $y_{чн}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + 2y' = xe^x .$$

Розв'язання. Оскільки $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$, то знайдемо спочатку $y_{зо}$.

Складаємо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 2y' = 0 .$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k = 0$$

має корені $k_1 = 0; k_2 = -2$, отже за (2.29) :

$$y_{зо} = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Знаходимо $y_{чн}$. Оскільки $f(x) = xe^x$ є правою частиною спеціального виду (добуток многочлена I степеня на e^x), і $a = 1$ не співпадає з k_1 і k_2, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = (A_1 x + A_2)e^x \ ,$$

де A_1, A_2 - невідомі числа. Знаходимо

$$y_{чн}' = (A_1 x + A_2)e^x + A_1 e^x; \ y_{чн}'' = A_1 e^x + (A_1 x + A_2 + A_1)e^x$$

і підставляємо в наше рівняння:

$$e^x (A_1 + A_1 x + A_2 + A_1 + 2A_1 x + 2A_2 + 2A_1) = xe^x.$$

Скорочуємо на e^x і збираємо доданки при однакових степенях x:

$$3A_1 x + (4A_1 + 3A_2) = x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3A_1 = 1 \\ 4A_1 + 3A_2 = 0 \end{cases},$$

звідки $A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = -\frac{4}{9}$. Отже, $y_{чн} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ і остаточно

$$y_{зн} = C_1 + C_2 e^{-2x} + (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^x.$$

2) Нехай тепер a **співпадає з одним коренем характеристичного рівняння і не співпадає з другим.**

У цьому випадку, якби ми шукали $y_{чн}$ у вигляді (2.33), то після підстановки в рівняння в лівій частині отримали б многочлен $(n-1)$-го степеня, а в правій - многочлен n-го степеня, що ні при яких $A_0,...,A_n$ не може бути тотожністю. Тому в цьому випадку шукаємо $y_{чн}$ у вигляді

$$y_{чн} = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' = xe^{-2x},$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0; y'(0) = -2$.

Розв'язання. Як ми вже знаходили в попередньому прикладі $k_1 = 0; k_2 = -2$ і $y_{зо}$ для однорідного рівняння $y_{зо} = C_1 + C_2 e^{-2x}$.

Оскільки тепер $a = -2$ співпадає з k_2, шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = (A_1 x + A_2)e^x x = (A_1 x^2 + A_2 x)e^x.$$

Двічі диференціюємо:

$$\begin{aligned} y_{чн}' &= (2A_1 x + A_2)e^{-2x} - 2(A_1 x^2 + A_2 x)e^{-2x} = \\ &= (2A_1 x + A_2 - 2A_1 x^2 - 2A_2 x)e^{-2x} \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} y_{чн}'' &= (2A_1 - 4A_1 x - 2A_2)e^{-2x} - \\ &- 2(2A_1 x + A_2 - 2A_1 x^2 - 2A_2 x)e^{-2x} \end{aligned}.$$

Після підстановки у рівняння, скорочення на e^{-2x} і збирання подібних, отримуємо рівність:

$$-4A_1 x + (2A_1 - 2A_2) = x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при першому і нульовому степенях x, отримуємо систему:

$$\begin{cases} -4A_1 = 1 \\ 2A_1 - 2A_2 = 0 \end{cases},$$

розв'язок якої $A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = -\frac{1}{4}$.

Таким чином $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-2x}$.

Задовольняючи початкові умови, знаходимо C_1, C_2.

Оскільки

$y_{зн}{}' = -2C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}(x^2 + x)e^{-2x}$, то маємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_2 - \frac{1}{4} = -2 \end{cases},$$

звідки $C_1 = -\frac{7}{8}, C_2 = \frac{7}{8}$. Остаточна відповідь:

$$y = -\frac{7}{8} + \frac{7}{8}e^{-2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-2x}.$$

3) Розглянемо тепер випадок, коли a **збігається з кратним дійсним коренем характеристичного рівняння** : $a = k_1 = k_2$.

Тепер, щоб після підстановки $y_{чн}$ в рівняння отримати в лівій і правій частині рівняння многочлени n-го степеня, шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x},$$

де невідомі коефіцієнти $Q_n(x)$ знаходяться аналогічно попереднім випадкам.

Приклад. Знайти загальний розв’язок неоднорідного рівняння:

$$y'' - 2y' + y = (12x + 2)e^x .$$

Р**озв’язання.** Для однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

корені якого $k_1 = k_2 = 1$. Отже

$$y_{зо} = C_1 e^x + C_2 x e^x .$$

Оскільки $\alpha = k_1 = k_2$, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = (A_1 x + A_2) x^2 e^x .$$

Знайшовши похідні $y_{чн}{}', y_{чн}{}''$ і підставивши в рівняння, приходимо до рівності:

$$6A_1 x + 2A_2 = 12x + 2,$$

звідки отримуємо: $A_1 = 2, A_2 = 1$.

Отже, $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = C_1 e^x + C_2 x e^x + (2x^3 + x^2)e^x$.

II. Права частина спеціального виду другого типу.

Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx), \tag{2.33}$$

де $P_n(x), T_m(x)$ - многочлени n-го і m-го степенів відповідно, $a, b \in R$.

1) Припустимо спочатку, що $a \pm ib$ **не співпадають з коренями характеристичного рівняння.**

Тоді (приймемо це без доведення) частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$y_{чн} = e^{\alpha x}(Q_k(x)\cos bx + R_k(x)\sin bx), \tag{2.34}$$

де $Q_k(x), R_k(x)$ - многочлени з невідомими коефіцієнтами степеня k, який дорівнює більшому із степенів $P_n(x), T_m(x)$.

Продиференціюємо $y_{чн}$ двічі підставимо в рівняння. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових виразах $x^l \cos bx$ та $x^l \sin bx$, ми отримаємо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $Q_k(x)$ та $R_k(x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 7y' + 12y = \sin x + 2\cos x.$$

Р**озв'язання.** Шукаємо $y_{зо}$ для однорідного рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

Складаємо його характеристичне рівняння :

$$k^2 - 7k + 12 = 0,$$

яке має корені $k_1 = 3; k_2 = 4$. Отже

$$y_{зо} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

Права частина $f(x)=\sin x+2\cos x$ є правою частиною виду (2.33), де $a=0, b=1, n=0, m=0$. Оскільки комплексних чисел $\pm i$ нема серед k_1, k_2, $k=\max(0{,}0)=0$ то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн}=A\cos x+B\sin x.$$

Диференціюємо $y_{чн}$ двічі:

$$y_{чн}{}'=-A\sin x+B\cos x,\; y_{чн}{}''=-A\cos x-B\sin x,$$

підставляємо в рівняння. Маємо

$$\begin{aligned}&-A\cos x-B\sin x+7A\sin x-7B\cos x+\\&+12A\cos x+12B\sin x=\sin x+2\cos x\end{aligned}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при функціях $\sin x$ і $\cos x$, отримаємо систему:

$$\begin{cases}11B+7A=1\\11A+5B=2\end{cases},$$

розв'язок якої $A=\dfrac{17}{86}, B=-\dfrac{3}{86}$. Таким чином,

$$y_{чн}=\frac{17}{86}\cos x-\frac{3}{86}\sin x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{зн}=y_{зо}+y_{чн}=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{17}{86}\cos x-\frac{3}{86}\sin x.$$

2) Якщо $a\pm ib$ **співпадають з коренями характеристичного рівняння**, то $y_{чн}$ слід шукати у вигляді:

$$y_{чн}=xe^{ax}(Q_k(x)\cos bx+R_k(x)\sin bx),$$

де, як і раніше, $k=\max(n,m)$.

Підкреслимо, що $f(x)$ може містити лише або функцію $\cos bx$ або функцію $\sin bx$ (один з многочленів $P_n(x)$ або $T_m(x)$ - тотожній **0)**. Але і в цьому випадку $y_{чн}$ слід шукати у вигляді (2.33).

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння: $y'' + 4y = \sin 2x$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1; y'(0) = \frac{1}{4}$.

Р**озв'язання.** Знаходимо $y_{зо}$. Складаємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 4y = 0,$$

його характеристичне рівняння

$$k^2 + 4 = 0,$$

має корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається формулою

$$y_{зо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Права частина $f(x) = \sin 2x$ є правою частиною виду (2.33), де $a = 0; b = 2; T_m(x) \equiv 0; P_0(x) = 1$. Оскільки $a \pm ib = \pm 2i$ співпадає з $k_{1,2}$, то шукаємо $y_{чн}$ у вигляді:

$$y_{чн} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Після диференціювання підставляємо $y_{чн}$ і похідні в рівняння і отримуємо:

$$4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \sin 2x.$$

Отже

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \ A = \frac{1}{4}; B = 0$$

$$y_{чн} = \frac{1}{4} x \cos 2x .$$

Тоді

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x .$$

Задовольняємо початкові умови і знаходимо C_1 і C_2:

$$y_{зн}{}' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x ,$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} .$$

Отже $C_1 = 1; C_2 = 1$ і розв'язок задачі Коші:

$$y = \cos 2x + \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x .$$

Глава 3. Системи диференціальних рівнянь.

Системою диференціальних рівнянь в формі Коші назвемо сукупність рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

Така система називається **системою n–го порядку**.

Надалі будемо розглядати **системи 2-го порядку**:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

де x – незалежна змінна, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – невідомі функція.

Розв'язком системи (3.2) на інтервалі $I \in R$ називаємо сукупність двох неперервно диференційованих на I функцій $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, які, будучи підставлені в (3.2), перетворюють систему в дві тотожності при $x \in I$.

Задачу знаходження розв'язку системи (3.2), який при $x = x_0$ приймає задані значення y_0^1, y_0^2 , тобто $\varphi_1(x_0) = y_0^1$, а $\varphi_2(x_0) = y_0^2$, називають **задачею Коші** для системи (3.2), а набір (x_0, y_0^1, y_0^2) **початковими умовами Коші**.

Загальним розв'язком системи в деякій області $D \in R^3$ називають набір функцій:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2), \end{cases}$$

Які для довільних допустимих значень C_1 і C_2 є розв'язками системи (3.2) і для будь-яких початкових даних $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$ існує такий єдиний набір C_1^0 і C_2^0 , що функції $y_1 = \varphi_1(x, C_1^0, C_2^0), y_2 = \varphi_2(x, C_1^0, C_2^0)$ дають розв'язок задачі Коші з вказаними початковими даними, тобто $\varphi_1(x_0, C_1^0, C_2^0) = y_1$, а

$\varphi_2(x_0, C_1^0, C_2^0) = y_2$.

Найпростіший метод розв'язування системи (3.2) полягає в її зведенні до одного рівняння 2-го порядку. Якщо таке зведення неможливе, то система розпадається на два незалежних рівняння.

Процедура зведення полягає у диференціюванні першого рівняння і підстановці в нього замість похідної $\frac{dy_2}{dx}$ її виразу з другого рівняння.

Продемонструємо цю процедуру на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати систему :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xsint, \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{cost}. \end{cases}$$

Тут t- незалежна змінна, а x , y - шукані функції від t.

Розв'язок. Перше рівняння розв'язується незалежно від другого. Воно є рівняння з відокремленими змінними $\frac{dx}{x} = sintdt$. Звідки $x = C_1 e^{-cost}$. Підставимо знайдене значення $x(t)$ в друге рівняння: $x = C_1$. Звідки $y = C_1 t + C_2$. Отже, розв'язком системи є функції $x = C_1 e^{-cost}$ і $y = C_1 t + C_2$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 2. Розв'язати систему :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t}. \end{cases}$$

Розв'язок: диференціюючи перше рівняння, отримуємо $x'' = \frac{y\prime}{y^2}$. Але з другого рівняння $y' = \frac{1}{x-t}$, а з першого $\frac{1}{y^2} = (x' = 1)^2$. Таким чином, розв'язування системи звелося до розв'язування однорідного рівняння другого порядку. Розв'яжемо його. Для цього перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{x''}{x'-1} = \frac{x'-1}{x-t}$$

або

$$\frac{(x'-1)\prime}{x'-1} = \frac{x'-1}{x-t}.$$

Звідки $\frac{d}{dt}\ln|x'-1| = \frac{d}{dt}ln|x-t|$. Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо: $x'-1 = C_1(x-t), C_1 \neq 0$, або $(x-t)' = C_1(x-t)$. Інтегруючи, маємо $ln|x-t| = C_1x + C_2$, або $x = t + C_2e^{C_1t}, C_2 \neq 0$. Тоді з першого рівняння системи отримуємо, що

$$y = \frac{1}{1-x\prime} = \frac{1}{C_1(t-x)} = \frac{1}{-C_1C_2e^{C_1t}} = -\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1t} .$$

Отже, загальним розв'язком є пара функцій

$$x = t + C_2e^{C_1t}, \quad y = -\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1t} , \quad C_1 \neq 0, C_2 \neq 0 .$$

Приклад 3. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 + sint, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2y}. \end{cases}$$

Розв'язок: Диференціюючи перше рівняння, отримуємо: $x'' = 2yy' + cost$. Але з другого рівняння маємо, що $2yy' = x$. Тому $x' - x = cost$. Знову отримуємо рівняння 2-го порядку. Це лінійне неоднорідне рівняння із спеціальною правою частиною, які ми розв'язували раніше. Його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку однорідного рівняння $x' = x = 0$ та частинного неоднорідного.

Загальний розв'язок однорідного рівняння отримаємо, знайшовши корені відповідного характеристичного рівняння: $k^2 - 1 = 0; k = \pm 1$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $x_ч = asint + bcost$. Підставляючи його в рівняння Тому $x' - x = cost$, отримаємо:

$$-asint - bcost - asint - bcost = cost.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при a і b, для визначення a і b отримаємо рівності

$$a = 0; b = -\frac{1}{2}. \text{ Отже, } x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 2cost \ .$$

Тоді з першого рівняння системи маємо, що

$$y^2 = x' - sint = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} sint.$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 2cost$$

$$y(t) = \pm \sqrt{C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} sint.}$$

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття.

2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

3. Диференціальні рівняння першого порядку, однорідні відносно змінних.

4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Два методи їх розв’язання.

5. Рівняння Бернулі. Два методи їх розв’язання.

6. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

7. Диференціальні рівняння n-го порядку. Основні поняття.

8. Інтегрування диференціальних рівнянь n-го порядку, що допускають пониження порядку.

9.Теорема про структуру загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.

10.Теорема про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.

11.Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами для випадку дійсних коренів (корені прості і кратні).

12. Знаходження загального розв’язку лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами для випадку комплексних коренів.

14. Знаходження частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами 2-го порядку для правої частини спеціального виду першого типу.

15 . Знаходження частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами 2-го порядку для правої частини спеціального виду другого типу.

16. Знаходження частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами 2-го порядку. Метод Лагранжа.

17. Системи диференціальних рівнянь та метод їх розв’язання.

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Задача 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.2. $x(1+y^2) - yy'\sqrt{4+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4-y^2}dx - ydy = x^4ydy$.

1.4. $(1-2y^2)dx - ydy = x^5ydy$.

1.5. $6xdx - 6ydy = 2xydy - 3xy^2dx$.

1.6. $x\sqrt{3+y}dx + y\sqrt{2+x}dy = 0$.

1.7. $(e^x+5)dy + ye^xdx = 0$.

1.8. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x}{1+y^2}} + 1 = 0$.

1.9. $6xdx - 6ydy = 6x^2ydy + xy^2dx$.

1.10. $x\sqrt{25-y^2}dx + \sqrt{4+x^2}dy = 0$.

1.11. $y(4+e^x)dy - e^x(y+2)dx = 0$.

1.12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2xdx - ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.14. $\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

1.15. $(e^x+8)dy - (y+1)e^xdx = 0$.

1.16. $\sin 2xdy - \cos xtgydx = 0$

1.17. $6xdx - ydy = yx^2dy + xy^2dx$.

1.18. $y\ln y + xy' = 0$.

1.19. $(1+e^x)y' = (y^2+1)e^x$.

1.20. $\sin 2y dy - \cos^3 x tgy dx = 0$

1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.

1.22. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.

1.23. $(3+e^x)tgyy' = e^x$.

1.24. $x(1+y^2) + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0$.

1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xydx$.

1.26. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y - y)dy = 0$.

1.27. $(1+e^x)\ln yy' = e^x$.

1.28. $3(xy+y)dy + \sqrt{2+y}\,x^2dx = 0$.

1.29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.

1.30. $2x + 2xy + \sqrt{2+x}\,y' = 0$.

1.31. $20xdx - 3ydy = x^2ydy - xydx$.

Задача 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2.4. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

2.7. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

2.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

2.10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

2.11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

2.12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

2.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.

2.14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

2.15. $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

2.16. $xy' = 3x + y$.

2.17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$.

2.18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

2.19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

2.20. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$.

2.22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$.

2.23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

2.24. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

2.25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.

2.26. $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$.

2.27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$.

2.28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.

2.30. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.31. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$.

Задача 3. Знайти розв’язок задачі Коші.

3.1. $y' - \frac{y}{x} = x^4,\ y(1) = 1$.

3.2. $y' - y\,ctgx = 2x\sin^2 x,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3.3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin^2 2x,\ y(0) = 1.$

3.4. $y' + ytgx = \cos x,\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$

3.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^3 + 2x^2,\ y(-1) = 4.$

3.6. $y' - \frac{1}{x+1}y = xe^x(x+1),\ y(0) = 1.$

3.7. $y' - \frac{y}{x} = x\cos x,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1.$

3.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

3.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^4,\ y(1) = 1.$

3.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x^4}{1+x^2},\ y(0) = 1.$

3.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5,\ y(2) = 4.$

3.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2+1}{x}e^{2x},\ y(1) = e.$

3.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x^2},\ y(1) = 2.$

3.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x-2},\ y(5) = 4.$

3.15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3,\ y(1) = -\frac{5}{6}.$

3.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1.$

3.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = x(1+x^2),\ y(1) = 3.$

3.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1,\ y(1) = 1$.

3.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^6},\ y(1) = 3$.

3.20. $y' + 2xy = -x,\ y(1) = 3$.

3.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},\ y(0) = 3$.

3.22. $y' + xy = x\ ,\ y(0) = 3$.

3.23. $y' - \frac{2}{x+1} y = x(x+1)^2 e^x,\ y(0) = 1$.

3.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x,\ y(0) = 1$.

3.25. $y' - \frac{2y}{x+1} = x(x+1)^4\ ,\ y(0) = \frac{1}{2}$.

3.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3$.

3.27. $y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\frac{1}{2}$.

3.28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln^2 x}{x},\ y(1) = 1$.

3.29. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3},\ y(0) = 0$.

3.30. $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1$.

3.31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^5},\ y(1) = 1$.

Задача 4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

4.1. $y'' x \ln x = y'$.

4.2. $xy'' + y' = 1$.

4.3. $4xy'' = y'$.

4.4. $xy'' + y' = x + 1$.

4.5. $tgx \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.

4.6. $x^2 y'' + xy' = 1$.

4.7. $y''ctgx + 3y' = 0$.

4.8. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

4.9. $y''tgx = 2y'$.

4.10. $y''cth2x = 2y'$.

4.11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.

4.12. $xy'' + 4y' = 0$.

4.13. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

4.14. $x^5 y'' + x^4 y' = 1$.

4.15. $xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0$.

4.16. $xy'' + y' + x = 0$.

4.17. $tgx \cdot y'' = y'$.

4.18. $x \cdot y'' + y' = \sqrt{x}$.

4.19. $tgx \cdot y'' = y' + 1$.

4.20. $tg5x \cdot y'' = 5y'$.

4.21. $th7x \cdot y'' = 7y'$.

4.22. $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = \sqrt{x}$.

4.23. $cthx \cdot y'' - y' + \frac{1}{chx} = 0$.

4.24. $(x+1) \cdot y''' + y'' = (x+1)$.

4.25. $(\sin x + 1) \cdot y'' = y' \cos x$

4.26. $x \cdot y''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4.27. $-x \cdot y'' + 2y' = \frac{2}{x^2}$.

4.28. $cthx \cdot y'' + y' = chx$.

4.29. $x^4 \cdot y'' + x^3 y' = 4$.

4.30. $y'' + \frac{2x}{x+1} y' = 2x$.

4.31. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.

Задача 5. Знайти розв’язок задачі Коші.

5.1. $4y^3 y'' = y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5.2. $y'' = 128y^3,\ y(0) = 1, y'(0) = 8$.

5.3. $y'' y^3 + 64 = 0,\ y(0) = 4, y'(0) = 2$.

5.4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$.

5.5. $y'' = 32\sin^3 y \cos y = 0,\ y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 4$.

5.6. $y'' = 98y^3,\ y(1) = 1, y'(1) = 7$.

5.7. $y'' y^3 + 49 = 0,\ y(3) = -7, y'(3) = -1$.

5.8. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1,\ \mathrm{y}(0) = \sqrt{2}/2, \mathrm{y}'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0, \mathrm{y}'(0) = 2$.

5.10. $y'' = 72y^3,\ \mathrm{y}(2) = 1, \mathrm{y}'(2) = 6$.

5.11. $y''y^3 + 36 = 0, \mathrm{y}(0) = 3, \mathrm{y}'(0) = 2$.

5.12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y,\ \mathrm{y}(1) = \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{y}'(1) = 3$.

5.13. $4y^3 y'' = y^4 - 16,\ \mathrm{y}(0) = \sqrt{2}/2, \mathrm{y}'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5.14. $y'' = 50y^3,\ \mathrm{y}(3) = 1, \mathrm{y}'(3) = 5$.

5.15. $y''y\ \ + 25 = 0,\ \mathrm{y}(2) = -5, \mathrm{y}'(2) = -1$.

5.16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0, \mathrm{y}'(0) = 3$.

5.17. $y'' = 18\sin^3 y\cos y,\ \mathrm{y}(1) = \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{y}'(1) = 2$.

5.18. $y'' = 32y^3,\ \mathrm{y}(4) = 1, \mathrm{y}'(4) = 4$.

5.19. $y''y^3 + 16 = 0,\ \mathrm{y}(1) = 2, \mathrm{y}'(1) = 2$.

5.20. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0, \mathrm{y}'(0) = 4$.

5.21. $y'' = 50\sin^3 y\cos y,\ \mathrm{y}(1) = \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{y}'(1) = 5$.

5.22. $y'' = 18y^3,\ \mathrm{y}(1) = 1, \mathrm{y}'(1) = 3$.

5.23. $y''y^3 + 9 = 0, \mathrm{y}(1) = 1, \mathrm{y}'(1) = 3$.

5.24. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1),\ \mathrm{y}(0) = \sqrt{2}, \mathrm{y}'(0) = \sqrt{2}$.

5.25. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0,\ \mathrm{y}(0) = 0, \mathrm{y}'(0) = 5$.

5.26. $y'' = 8y^3,\ \mathrm{y}(0) = 1, \mathrm{y}'(0) = 2$.

5.27. $y''y^3+4=0,\ \mathrm{y}(0)=-1, \mathrm{y}'(0)=-2$

5.28. $y''=2\sin^3 y\cos y,\ \mathrm{y}(1)=\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{y}'(1)=1$.

5.29. $y^3y''=y^4-16,\ \mathrm{y}(0)=2\sqrt{2}, \mathrm{y}'(0)=\sqrt{2}$.

5.30. $y''=2y^3,\ \mathrm{y}(-1)=1, \mathrm{y}'(-1)=1$.

5.31. $y''y^3+1=0,\ \mathrm{y}(1)=-1, \mathrm{y}'(1)=-1$.

Задача 6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

6.1. $4y''+5y'-9y=(16-12x)e^x$.

6.2. $y''-3y''+2y=(1-2x)e^{2x}$.

6.3. $y''-y'=3x+2$.

6.4. $y''-2y'+y=(2x+5)e^{2x}$.

6.5. $y''-3y'+4y=(18x-21)e^x$.

6.6. $y''-5y'+4y=(2x-5)e^x$.

6.7. $y''-4y'+4y=x-1$.

6.8. $y''+2y'+y=(18x+21)e^{-x}$.

6.9. $y''+y'-2y=(8x+4)e^x$.

6.10. $y''-3y'-2y=-4x$.

6.11. $y''-3y'+2y=(4x+9)e^{2x}$.

6.12. $y''+4y'+5y=12x+16$.

6.13. $y''-y'-2y=(6x-11)e^{-x}$.

6.14. $y''+y'-2y=(6x+5)e^x$.

6.15. $y''+4y'+4y=9x+15$.

6.16. $y'' + 2y' = 4(\sin x + \cos x)$.

6.17. $y'' - 4y' + 4y = -e^x \sin 6x$.

6.18. $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$.

6.19. $y'' + y' = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

6.20. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

6.21. $y'' - 4y' + 8y = 2(5\sin x - 3\cos x)$.

6.22. $y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x)$.

6.23. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.

6.24. $y'' + 6y' + 13y = e^{3x} \cos 4x$.

6.25. $y'' + y' = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

6.26. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

6.27. $y'' - 4y' + 8y = -3\sin x + 4\cos x$.

6.29. $y'' + 2y' = 10(\sin x + \cos x)$.

6.30. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.

6.31. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

Задача7. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

7. 1 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

7.2 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases}$

7.3 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 5y \end{cases}$

7.4 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + y = -3x - y \end{cases}$

7.5 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 9y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 7y \end{cases}$

7.6 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y + e^{t} \\ \frac{dy}{dx} = x - 2y + e^{-t} \end{cases}$

7.7 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$

7.8 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y + sint \\ \frac{dy}{dx} = y + cost \end{cases}$

7.9 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 17y \\ \frac{dy}{dt} = -x = 2y \end{cases}$

7.10 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + cost \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}$

7.11 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -10x + 6y \end{cases}$

7.12 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x \\ \frac{dy}{dt} = y + t \end{cases}$

7.13 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - y \\ \frac{dy}{dt} = 18x - 2y \end{cases}$

7.14 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 5y \end{cases}$

7.15 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -20x - y \end{cases}$

7.16 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 20y \\ \frac{dy}{dt} = -y + x \end{cases}$

7.17 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

7.18 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

7.19 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$

7.20 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -20x + 6y \end{cases}$

7.21 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

7.22 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

7.23 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

7.24 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

7.25 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

7.26 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dy} = 5x + 5y \end{cases}$

7.27 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$

7.28 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + 2y \end{cases}$

7.29 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$

7.30 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$

7.31 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. Збірник завдань з вищої математики. Ч.2.-Київ: Політехніка, 2002.-108 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.-Київ: А.С.К.-2005.- 648с.ISBN 966-539-320-0

3. Пискунов Н.С.Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.- М .Наука, 1970.-576 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс (9-е изд.). М:Высшее образование .- 2009.-606 с.

5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Практический курс. Учебное пособие.-М. :Высшая школа.-2006. -383 с.

6. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Вища математика. Практикум: у 2ч. - Київ, КНЕУ, 2012.-443,[5]с.

Зміст